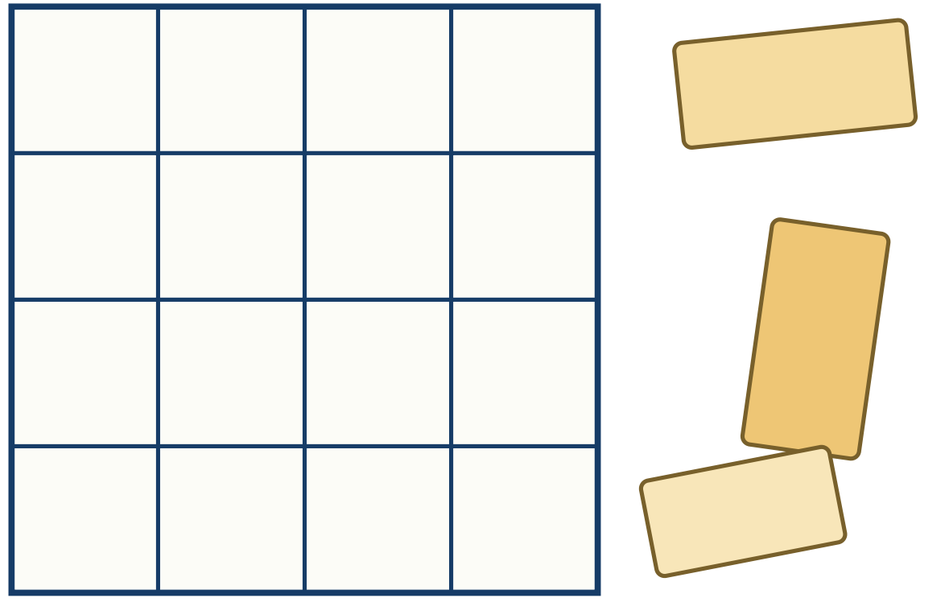
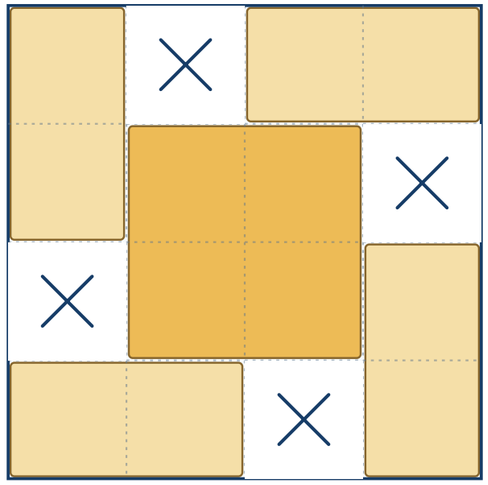
走近大模型 · 第 1 讲

AI 一年
长大了多少?



先摆一摆：4×4 的方格，最少用几块砖？



5 块

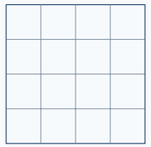
这是 2025 年 IMO 的第六题：630 名选手里，只有 6 人这道题得满分

Problem 6

Problem 6. Consider a 2025×2025 grid of unit squares. Matilda wishes to place on the grid some rectangular tiles, possibly of different sizes, such that each side of every tile lies on a grid line and every unit square is covered by at most one tile.

Determine the minimum number of tiles Matilda needs to place so that each row and each column of the grid has exactly one unit square that is not covered by any tile.

2025 年 IMO（国际数学奥林匹克）第 6 题：2025×2025 的方格表里放长方形砖，每行、每列恰好留一个空格，最少放几块?



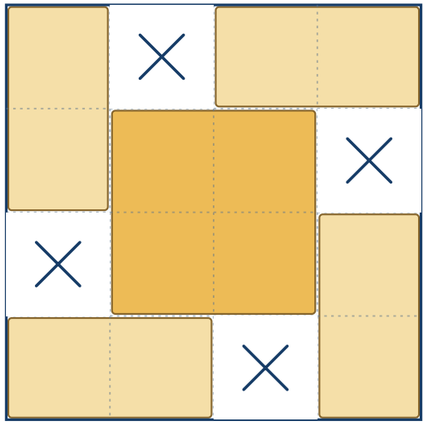
刚才试过

两天	每天 3 题、4 个半小时	每题 7 分	满分 42

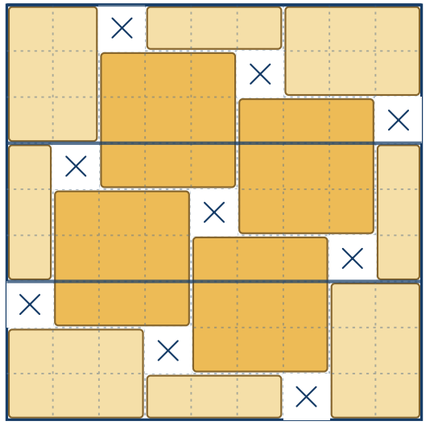


630 名选手里，这道题得满分（7 分）的：6 人

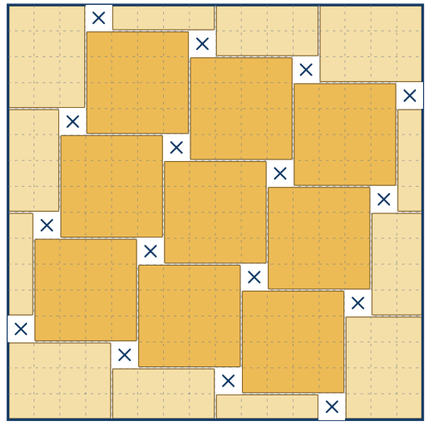
先证“做得到”（上界）：把 4×4、9×9、16×16 的构造推广到 2025，2112 块可行



4×4：1 块 2×2 ＋ 外圈 4 块 ＝ 5 块

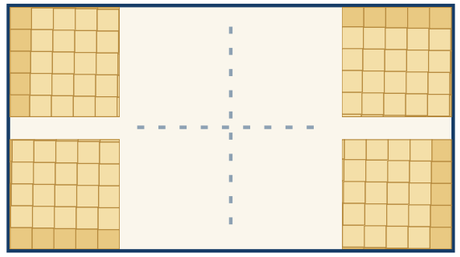


9×9：4 块 3×3 ＋ 外圈 8 块 ＝ 12 块



16×16：9 块 4×4 ＋ 外圈 12 块 ＝ 21 块

> 边长 k^2：$(k-1)^2$ 块 k×k 的方砖 ＋ 外圈 $4(k-1)$ 块 ＝ $k^2 + 2k - 3$ 块



示意

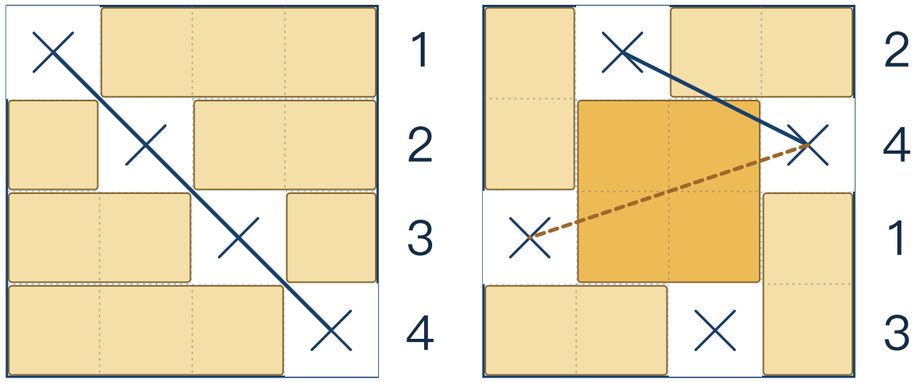
2025 ＝ 45^2：44^2 ＝ 1936 块 45×45 的方砖 ＋ 外圈 4×44 ＝ 176 块

1936 ＋ 176 ＝ 2112 块

上界：最少块数 ⩽ 2112。能不能更少?

再证“不能更少”（下界）：空格的位置对应一个排列，砖数 ⩾ N＋a＋b−3

从上往下，读每一行的空格在第几列：



> 每行、每列各一个空格 ⟺ 1 到 N 的一个排列

上升子列：从左到右取若干项，一项比一项大（不必相邻）；最长上升子列的长度记作 a，最长下降子列的长度记作 b

排列	最长上升子列 a	最长下降子列 b	最少砖数
1 2 3 4	4	1	6
2 4 1 3	2	2	5
3 6 9 2 5 8 1 4 7	3	3	12

引理（证明提纲见附录）：砖数 ⩾ N ＋ a ＋ b − 3

要让这个下界小，a 和 b 都要小。能同时都小吗?

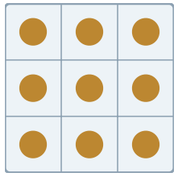
a 和 b 不能同时小：Erdoš–Szekeres 定理（1935），最长上升子列 × 最长下降子列 ⩾ N

Erdoš–Szekeres 定理（1935）：1 到 N 的任何一个排列，最长上升子列长 a、最长下降子列长 b，则

$a \times b \geqslant N$

例：　3　　6　　9　　2　　5　　8　　1　　4　　7

给每一项配一个数对：（以它结尾的最长上升子列的长度，以它结尾的最长下降子列的长度）



(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(1,3)	(2,3)	(3,3)

后一项比前一项大：数对的第一个分量至少大 1；比前一项小：第二个分量至少大 1。

所以任何两项的数对都不同。

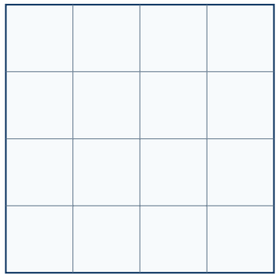
数对最多 a × b 种，N 项需要 N 种（抽屉原理）：$a \times b \geqslant N$

基本不等式：$a + b \geqslant 2\sqrt{(ab)} \geqslant 2\sqrt{N}$

N = 2025：$a + b \geqslant 90$，砖数 ⩾ 2025 + 90 − 3 = 2112（下界）

上界 2112，下界 2112：最少恰好是 2112 块

这道第六题，2025 年到了金牌线的 AI 做出来了吗?



2025 年 7 月，AI 第一次达到 IMO 金牌分数线。

这道第六题，它做出来了吗?

A 做出来了　B 没做出来

第 1–5 题：7、7、7、7、7

第 6 题：0



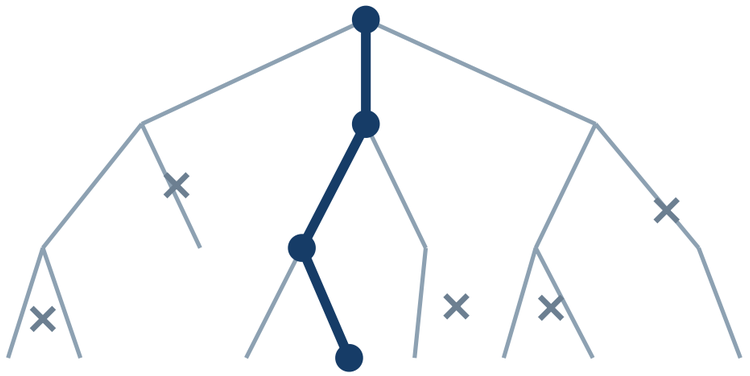
35 分，刚好到金牌线

> 评分：IMO 官方阅卷人，与评学生答卷同一标准

AI 做数学从 1956 年就开始了：推理规则由人写，靠启发式搜索找证明

1956 年：常被称作“第一个 AI 程序”的逻辑理论家

证出了《数学原理》第二章前 52 条定理里的 38 条



从哪些定理出发、每一步怎么推、哪些分支剪掉（启发式搜索）：规则都是人写的

示意（组合爆炸）：每一步有 10 种推法，推 20 步，就有 10^{20} 条搜索路径

每秒搜索 1 亿条，约需 3 万年

难点：机器生成的证明由谁验证？两条技术路线：形式化证明与自然语言证明

要训练机器做证明题：它生成一万份证明，由谁验证对错？

路线一，形式化证明：用证明检查器能逐步验证的形式化语言写（如 Lean）

左栏：`example : 2 + 2 = 4 := rfl` ✓ 通过

`example : 2 + 2 = 5 := rfl` ✗ 报错

优点：由证明检查器自动验证，快；通过检查的证明就是正确的

代价：题目要先形式化（由人译成这种语言）

路线二，自然语言证明：像人一样用文字写

右栏：“由基本不等式，$a + b \geqslant 2\sqrt{(ab)}$……”



优点：任何题目都能直接写

代价：要人来评分，慢、成本高；看似正确的证明可能有漏洞

你预测哪条路线先拿到 IMO 金牌？

举手之前先想：怎么检验你的预测？

2022 年 2 月的一次公开打赌：AI 能在 2025 年底前拿到 IMO 金牌吗?

2022 年 2 月：两位研究 AI 的人，在网上公开打了个赌。

AI 能在 2025 年底前拿到 IMO 金牌吗?

一位：不到 8%（最难那一题：4%）	另一位：至少 16%

那时 ChatGPT 尚未发布（同年 11 月 30 日发布）

当时手里的证据（2021 年的一项研究）：

12,500 道竞赛数学题

语言模型的正确率：3.0% 到 6.9%

一位计算机博士生：约 40% 一位三届 IMO 金牌得主：90%

按当时的趋势外推：正确率到 40% 约需 10^{35} 个参数

你估计的概率是多少?

2024 年，形式化路线先到银牌：题目由人形式化，系统用强化学习训练，证明检查器验证

2022 | 2024 | 2025

2024 年 7 月：银牌水平，28 分（六题做出四题）

① 形式化：人把题目译成形式化语言

② 搜索证明：一题几分钟，其余最长 3 天

③ 验证：证明检查器逐步检查

怎么训练的（强化学习）：赛前自己证明或否证了数百万道题，对错由证明检查器判定

做出：两道代数、一道数论（其中一道全场只有 5 位选手做出）、一道几何

没做出：两道组合题

2025 年，自然语言路线到了金牌线：直接读题，用自然语言写证明，四个半小时

2022 2024 2025

2024 年 7 月：银牌水平，28 分（六题做出四题）

直接读题，用自然语言写证明，不经过形式化

怎么训练的：在多步推理和定理证明的数据上做强化学习；还给了它一批精选的高质量解答

2025 年 7 月：金牌线，35 分（六题做出五题）

和选手一样：4 个半小时

谁评分：IMO 官方阅卷人，和评学生答卷同一个标准

两条路线都到了，各留一个问题：形式化路线要人先把题目形式化，自然语言路线要人来评分

	形式化路线（2024）	自然语言路线（2025）
证明的语言	形式化语言	自然语言
谁来验证	证明检查器，逐步	人：官方阅卷人
用时	一题几分钟，其余最长 3 天	4 个半小时
成绩	28 分，银牌水平	35 分，金牌线
留下的问题	题目要人先形式化	没有人评分，分数就不成立

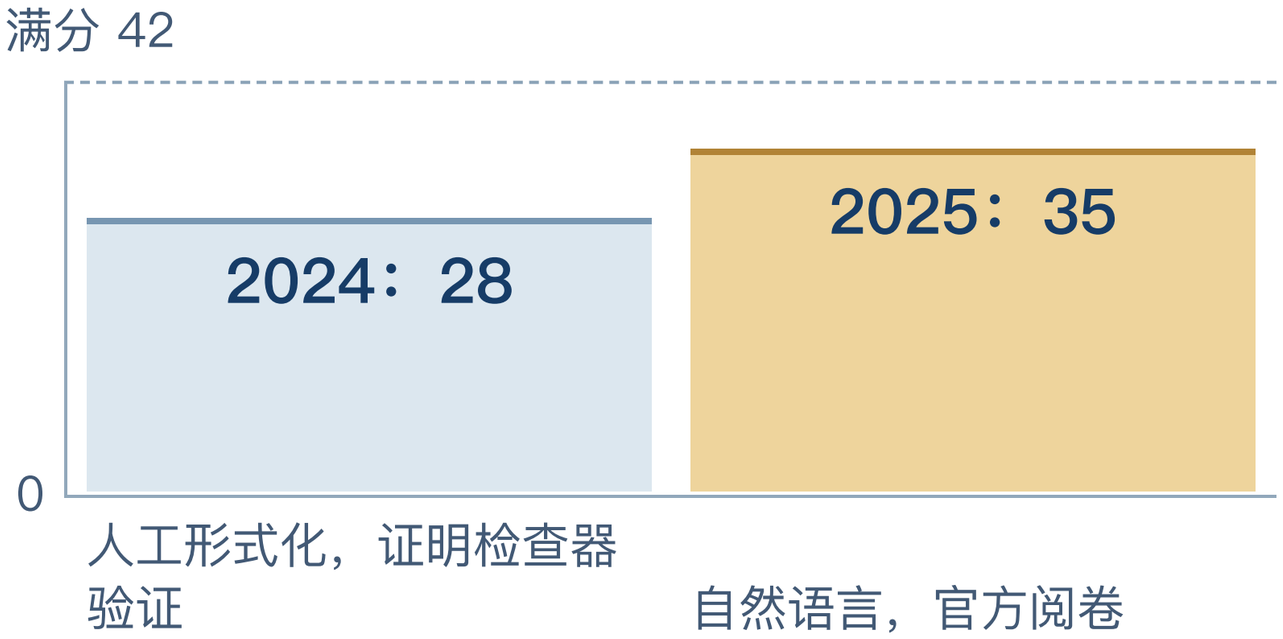


2026 年，两条路线在合流：用自然语言推理，再形式化、交给证明检查器验证

2026 年 9 月，有公司公布：它的 AI 用约 11 天，把费马大定理的证明形式化成约 1300 万行、经证明检查器验证的版本

怎么度量进步？第一个指标是竞赛得分：28、35，离满分 42 只差一道题

IMO 得分

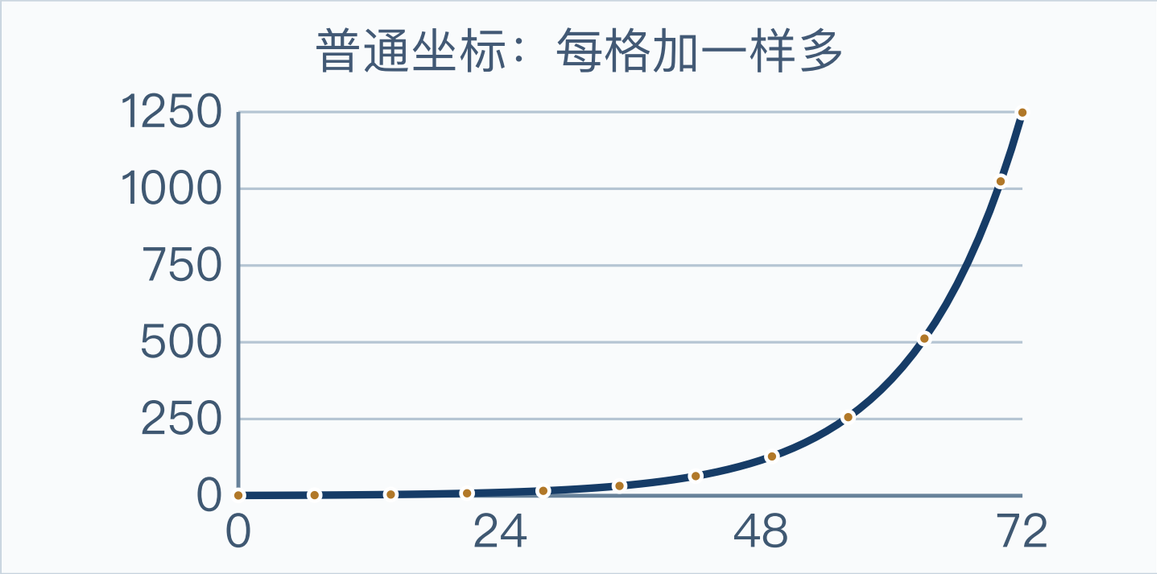


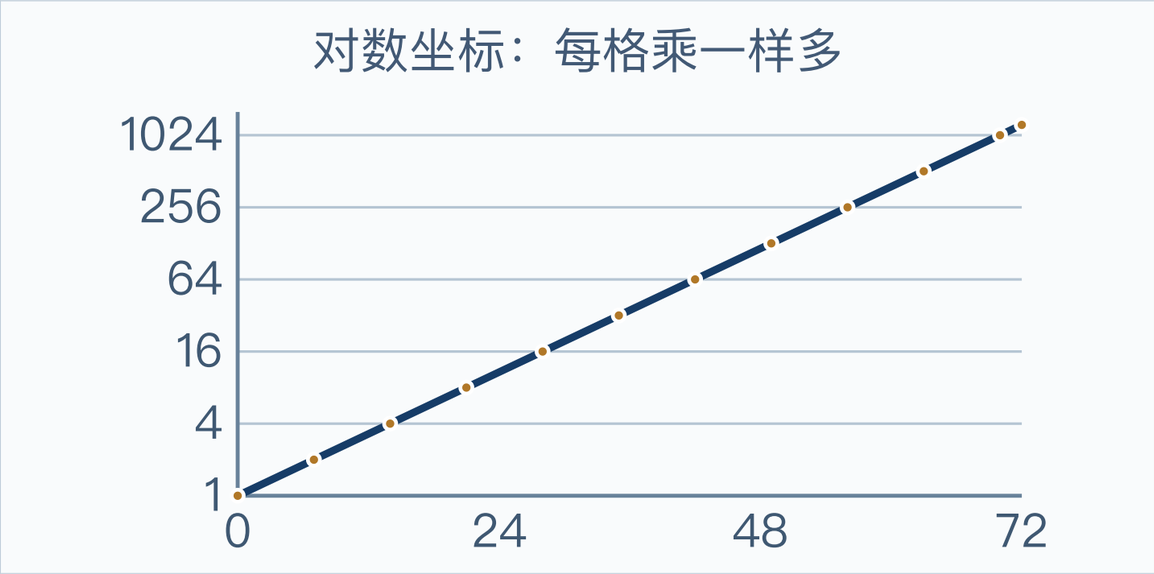
局限一：有上限（指标会饱和）。离满分只差一道题；到了 42，再进步也测不出来

局限二：两年的评测条件不同，严格说不能直接比较

读图的工具，对数坐标：纵轴每格乘同一个倍数，直线表示指数增长

同一组数，两种画法





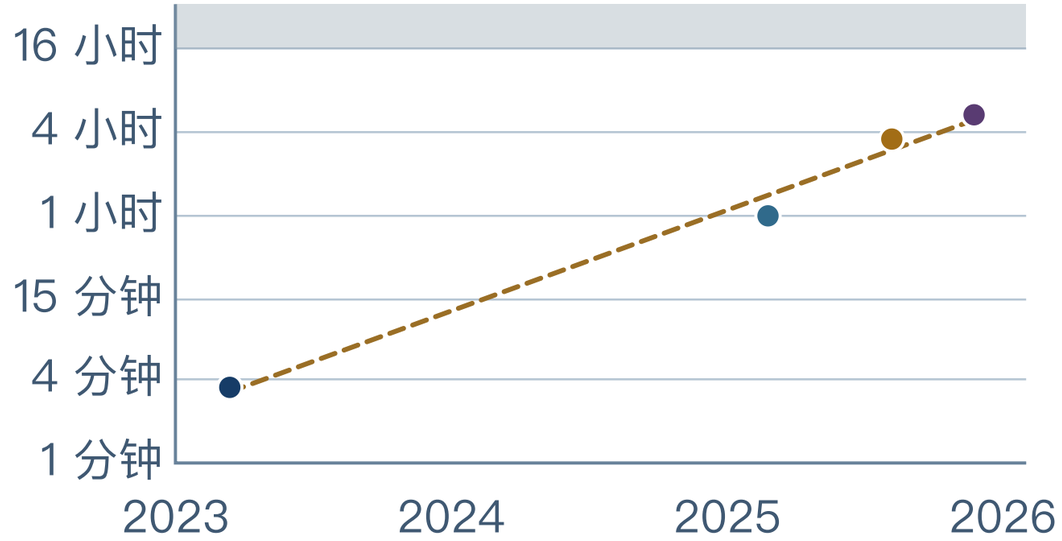
> 对数坐标上的直线 ⟺ 指数增长：每隔固定的时间翻一番（翻倍时间）

每 T 个月翻一番，t 个月后是原来的 $2^{\frac{t}{T}}$ 倍

T = 7：一年是 $2^{\frac{12}{7}} \approx 3.3$ 倍；六年是 $2^{\frac{72}{7}} \approx 1250$ 倍

第二个指标，时间跨度：模型能独立完成的任务长度，从 3.5 分钟到 320 分钟，约四个多月翻一番

一家评测机构的指标“50% 时间跨度”：模型有 50% 成功率独立完成的任务，人类专家需要多长时间?



- GPT–4（2023 年 3 月的版本）：3.5 分钟
- GPT–5：214 分钟
- Claude 3.7 Sonnet：60 分钟
- Claude Opus 4.5：320 分钟

评测条件：软件类任务 · 成功率 50% · 2026 年 1 月的版本

机构拟合的翻倍时间：用全部数据约 196 天；只看 2023 年以后约 131 天

验算：320 ÷ 3.5 ≈ 91 倍 ≈ $2^{6.5}$

约 32 个月翻倍 6.5 次：翻倍时间不到 5 个月

超过 16 小时：现有题库测不准（这个指标也会饱和）

测的是软件类任务，成功率只要求 50%

它不等于“AI 能连续自主工作这么久”

再预测一次：2025 年第六题 0 分，一年后的新卷子，它能拿满分吗?

证据一：两年，28 分到 35 分

证据二：时间跨度每 4 到 7 个月翻一番

证据三：2024 年没做出的两道是组合题；2025 年唯一没做出的第六题，也是组合题

2026 年 7 月，IMO 在上海。新的一整张卷子，它能拿满分吗?

能 | 不能 | 说不准

一年以后，上海：新的一整张卷子，它拿了多少分？

第 67 届 IMO · 上海 · 2026 年 7 月

117 个国家和地区 · 666 名选手

金牌线 29 分 · 金牌 55 枚 · 满分 7 人

华为：小艺，42/42

小红书：dots-note-3.0，42/42

公司公布

据报道：题目在选手考完后才给，限时提交

公司说（小红书）：测试时严禁任何形式的人工干预

公司说（小红书）：答卷交 IMO 组委会评分

IMO 官网的成绩页：没有提到 AI

01–17 上海，2026

同是“满分”，验证的严格程度不同：四个层级，每降一级少一层独立验证

④ 官方阅卷，IMO 主席出面确认（2025，35 分）

③ 一家公司说：答卷交 IMO 组委会评分（2026，42 分）

② 个人自测：一位投资人说，四个模型都是 42 分（2026）

① 每题多次尝试取最高分，由模型评分（2026）

同一个模型、同一张卷子：一张成绩单 42 分，另一张 35 分

左：一位投资人自己测

Kimi K3 42/42

同一个模型，差 7 分，正好一道题

哪张更可信？你还缺什么信息？

右：第三方测试（2026 年 8 月）

模型	得分（满分 42）
GPT-5.6 Sol	42
Claude Fable 5	41
Kimi K3	35
DeepSeek-V4-Flash	30
DeepSeek-V4-Pro	30
MiMo-V2.5-Pro	30
GLM 5.2	21
Qwen 3.6 35B A3B	16
同表：2026 年人类选手的中位数	16

评测条件：每题多次尝试，取最高分；两个模型独立盲评，分歧由第三个模型裁定

条件一，尝试次数：单次成功率 30%，8 次取最优就是 94%

一道题，单次成功率是 p。

独立尝试 k 次，至少成功一次（k 次取最优）的概率：

$$P = 1 - (1 - p)^k$$

p = 0.3 时：



k = 1：30%　　k = 2：51%　　k = 4：76%　　k = 8：94%　　k = 16：99.7%

8 次取最优（成功 1 次就算）：94%

8 次全部成功：$0.3^8 \approx 0.0066\%$

读成绩先问：是多次尝试取最优，还是单次?

条件二，评分者：人工评分成本高，模型评分可能误判，形式化验证只适用于已形式化的题



人工评分（官方阅卷人）

可靠，没见过的解法也能评

慢、成本高：难以用于大规模评测



模型评分

快、成本低

可能误判：那张第三方成绩表的作者，自己把“用模型评分”列为局限



形式化验证（证明检查器，如 Lean）

快；通过检查的证明就是正确的

只适用于已经形式化的题和证明，题目的形式化是否忠实于原题仍要人核对

三种评分方式，没有一种同时做到可靠、快、通用

条件三，数据污染：训练数据截止前出的题 10 道全对，新近出的 10 道全错

2023 年，有人用一个编程竞赛网站上的简单题测试刚发布的 GPT-4

它的训练数据截止于 2021 年 9 月

2021 年以前出的题：10 道全对

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓

新近出的题：10 道全错

× × × × × × × × × ×

研究者的判断：它很可能记住了训练数据里的题目和解答（数据污染）

所以评测要用训练数据截止之后的新题：IMO 每年 7 月出六道新题

条件四，人工干预：谁做的形式化，提示词里写了什么，谁选的答案

谁做的形式化？
2024 年：题目由人工形式化

提示词里写了什么？
2025 年：指令里加了解 IMO 题的一般建议，还给了一批精选的解答

谁选的答案？ 2026 年的第三方测试：每题多次尝试，取最高分

> 这些做法都由发布方自己公开说明，不是作弊

但它们决定了：这个成绩衡量的是模型独立的能力，还是模型加上人的能力

读一个评测成绩，先问四个条件：尝试次数、评分者、数据污染、人工干预



尝试次数：单次，还是多次取最优？



评分者：官方、公司、模型，还是证明检查器？



数据污染：题目是不是新出的？



人工干预：谁给的题，谁选的答案？

这四个条件，备这一讲时就用上了：帮课程组查资料的 AI，两句话各改了一个条件

帮课程组查资料的 AI 写道：

“IMO 主席致贺，确认 AI 满分”

> 新闻稿和 IMO 官网里都找不到这句（评分者被拔高了一级）

“一个开源模型，单趟只花 12 美分，就过了金牌线”

> 不是单次：每题多次尝试取最高分，由模型评分（尝试次数被说成了一次）

回原文核：

人工核定

同一年的高考：考试期间，多家 AI 产品暂停了拍题答疑功能



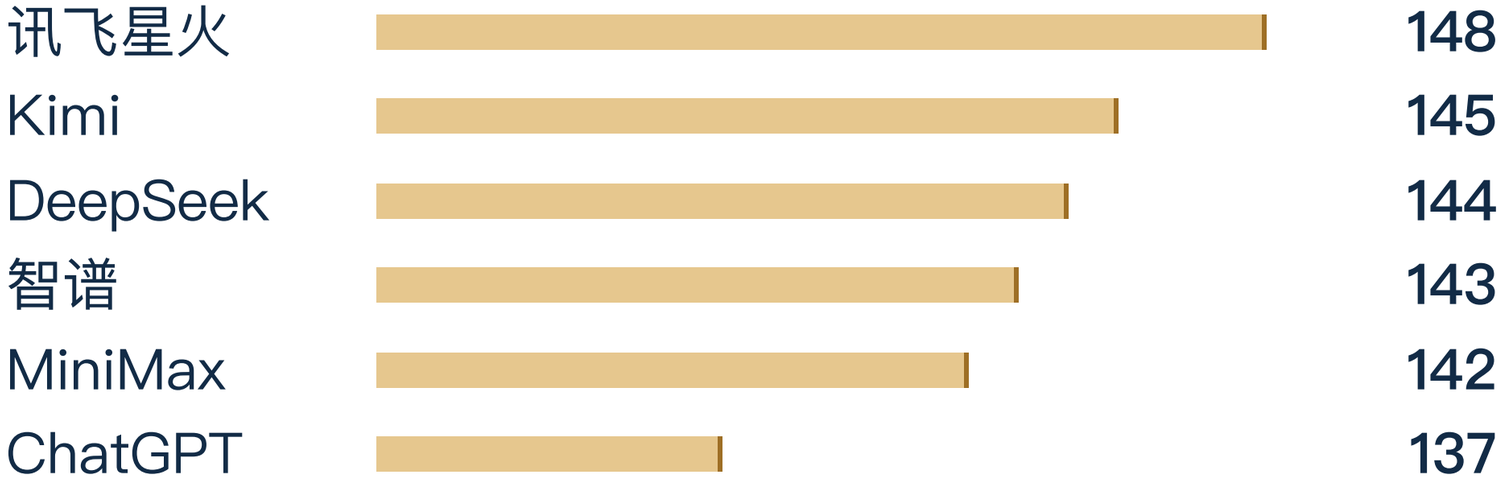
2026 年 6 月，高考前夕

豆包、千问、夸克、Kimi 等陆续“限时上锁”：暂停拍题答疑功能

考后，两位名师按步骤给分，批阅 6 款 AI 的高考数学答卷：137 到 148 分

2026 年新高考 I 卷数学（满分 150）

两位北京数学名师按高考的评分方式（按步骤给分）批阅 6 款 AI 的答卷



失分多在压轴题的步骤分：有一份答卷第 19 题得 12 分（满分 17）

试卷由网络流出的多个版本交叉还原，可能与真卷不完全一致

被圈出的两处：它用了大学数学的工具（向量积、上确界），却不知道这张卷子上“不宜使用”



第 18 题（2）：四份答卷用了向量积（叉乘）

第 19 题（2）：一份答卷用了“上确界”

一位特级教师：“高中未学过，……一般不宜使用。”

示例（不是高考原题）：求同时垂直于 $a = (1, 0, 1)$ 和 $b = (0, 1, 1)$ 的向量

高中的做法：设 $n = (x, y, z)$，由 $n\cdot a = 0$、$n\cdot b = 0$ 得 $x + z = 0$、$y + z = 0$，取 $z = -1$，$n = (1, 1, -1)$

向量积（叉乘）：$a \times b = (0\cdot 1 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - 1\cdot 1, 1\cdot 1 - 0\cdot 0) = (-1, -1, 1)$，一步得到

现场试一道：把常见的题改掉一个条件，看它是在推理，还是在套用见过的解法（可选）



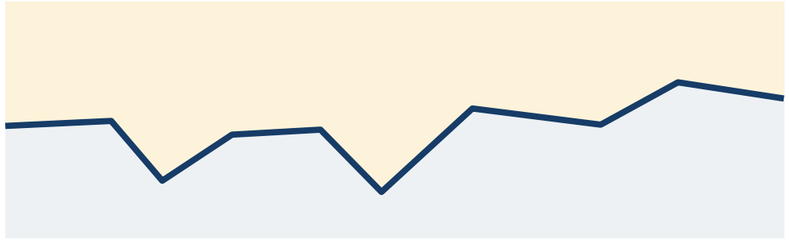
现场测试：一道常见的题，改掉其中一个条件

答对：这类变式它能处理

答错：看它错在哪一步，是否套用了原题的解法

能力不均衡：一项 758 人的实验里，边界内多完成 12%，边界外正确率低 19 个百分点

做得好：IMO 新卷子满分（公司公布）· 会用大学数学的工具



做得不好：判断哪些工具在这张卷子上不宜使用 · 压轴题的步骤书写

2023 年的一项实验：758 位咨询顾问

边界以内的任务，用 AI 的人：多完成 12.2%，快 25.1%，质量高 40% 以上



边界以外的一项任务，用 AI 的人：正确率低 19 个百分点

研究者称之为“锯齿状的技术边界”（jagged technological frontier）

难点：边界两侧的任务，看起来难度相近

为什么不均衡？一个假说：对错可以自动验证的任务，进步最快

这件事的对错由谁验证？

可自动验证：形式化证明（Lean）· 程序能否通过测试	人来评分，有公认的评分标准：IMO 的自然语言证明 · 高考的步骤分	只有不成文的规范：这张卷子上哪些工具“不宜使用”

> 一个假说（不是定论）：越容易自动验证，可用的训练信号越多，进步越快

右边这些任务，训练信号从哪来？

一年里进步的不只是数学：四项成果，每项先看评测条件

编程｜2025 年 9 月，国际大学生程序设计竞赛（ICPC）全球总决赛：一道 139 支队伍都没做出的题，AI 开赛半小时内做出

评测条件：在比赛之外，照同样的规则做；名次是公司自行比较得出的 → 第 5 讲

证明｜2026 年 9 月：有公司公布，它的 AI 用约 11 天完成了费马大定理的形式化证明，并通过证明检查器的验证

评测条件：正确性由证明检查器验证；用时是公司自述 → 第 9 讲

世界模型｜2026 年 10 月：可以实时交互、能用一句文字指令修改场景的世界模型（研究预览）

评测条件：研究预览，只给受信任的测试者 → 第 7 讲

机器人｜2026 年 4 月：人形机器人在专用赛道上跑完半程马拉松，净时 50 分 26 秒

评测条件：专用赛道，与人类选手分道进行 → 第 8 讲

它会的和它错的，都不是人写的规则：那是从哪来的?

怎么做 IMO 第六题

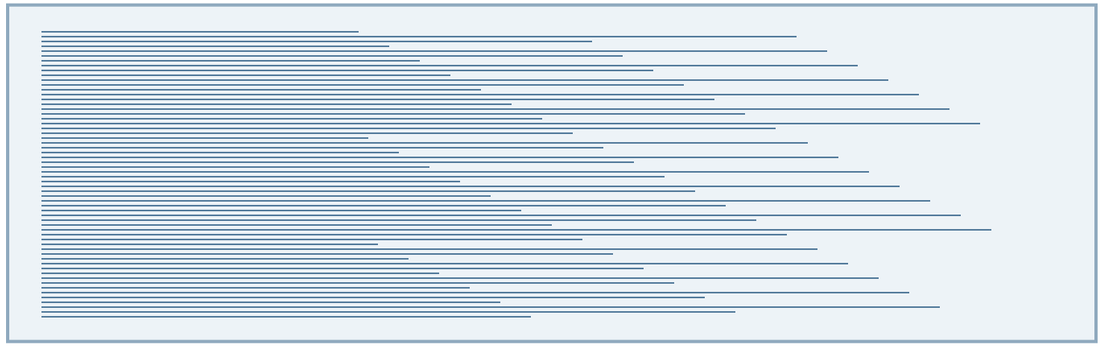
高考解答里不宜用向量积（叉乘）

没有人写过这条规则

它会的和它错的，是从哪来的?

> 先看：一个语言模型由什么构成

运行一个语言模型的程序可以只有 60 行；其余是 1.24 亿个参数



60 行程序

2023 年公开的一个实现：输入一段文字，预测下一个词元（token，文字切成的小片段），接到末尾，再预测下一个

+

```
011 100 101 110 111 000 001 010 011 100
101 110 111 000 001 010 011 100 101 110
111 000 001 010 011 100 101 110 111 000
001 010 011 100 101 110 111 000 001 010
011 100 101 110 111 000 001 010 011 100
101 110 111 000 001 010 011 100 101 110
```

1.24 亿个参数（每个参数是一个数）

来自一个公开的小语言模型

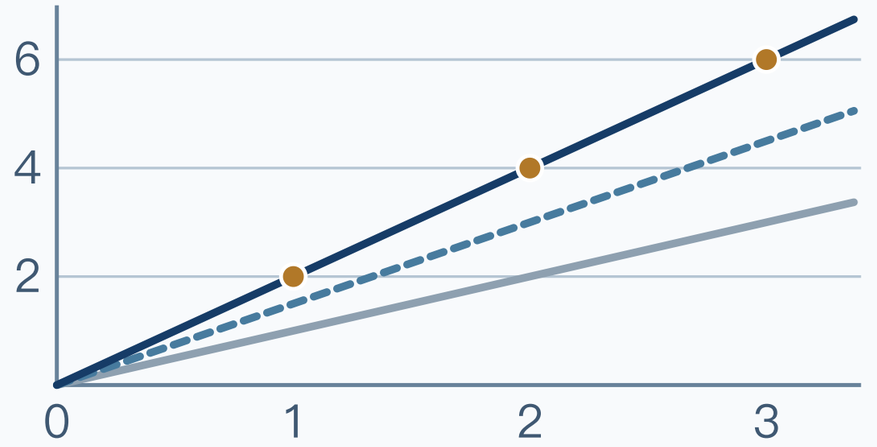
60 行程序 + 1.24 亿个参数 = 一个能续写文字的语言模型

程序是人写的；参数不是人写的，是训练得到的。

“训练”在做什么：只有一个参数的模型，损失函数是一条抛物线，朝损失减小的方向调参数

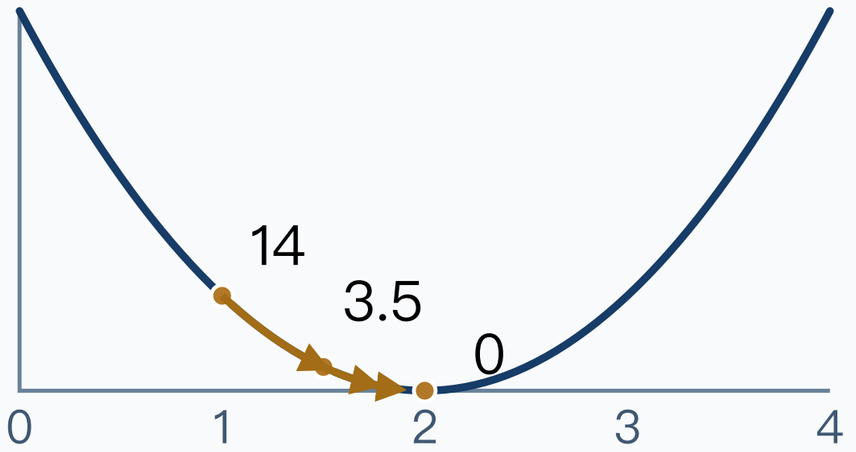
数据：(1, 2)、(2, 4)、(3, 6)

模型：y = w·x，只有一个参数 w



损失函数（这里取误差的平方和）：

$L(w) = (w-2)^2 + (2w-4)^2 + (3w-6)^2 = 14(w-2)^2$



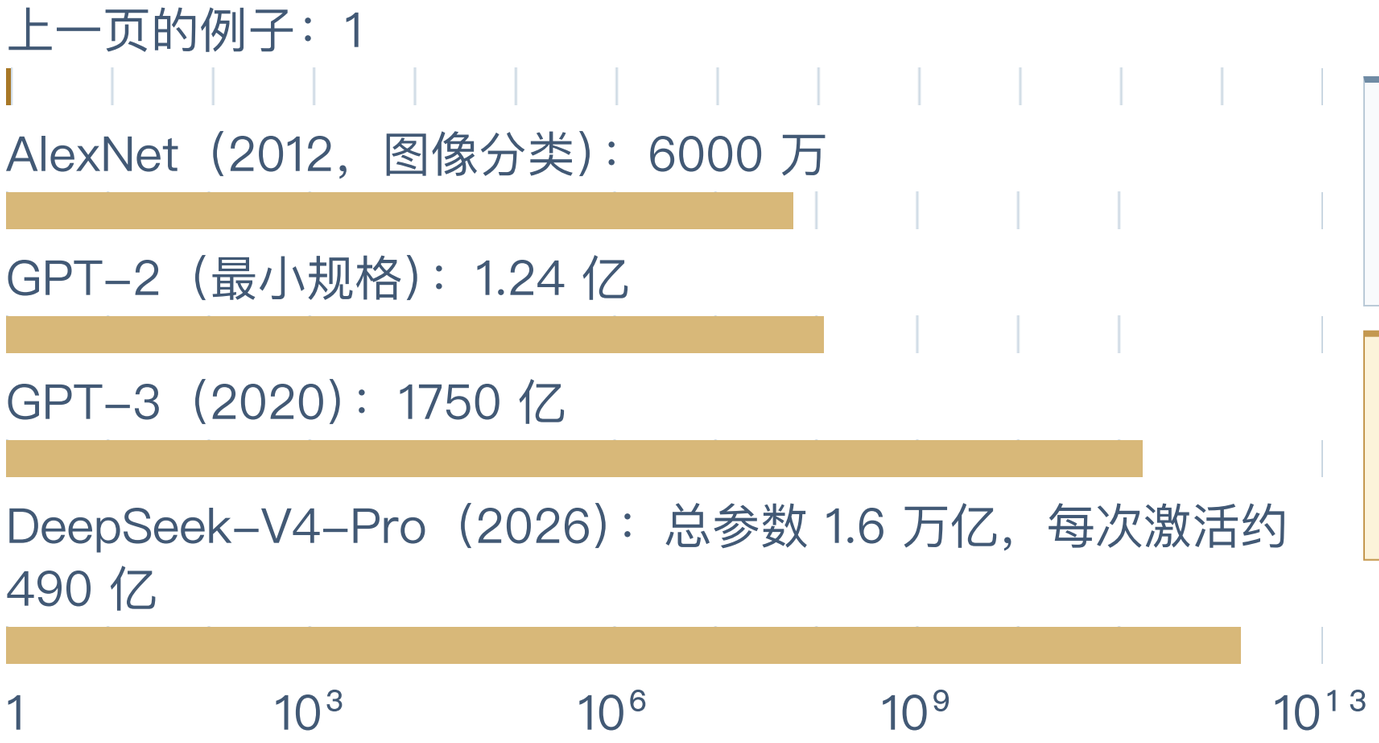
w = 1：14 w = 1.5：3.5 w = 2：0

> 训练：从任意的 w 出发，每次朝损失减小的方向把 w 调一点（梯度下降的想法）

w 逐步接近 2，损失逐步接近 0。没有人告诉它“2”：人只给了数据，定义了损失

参数从 1 个到 1.6 万亿个：没有一个是人手设定的

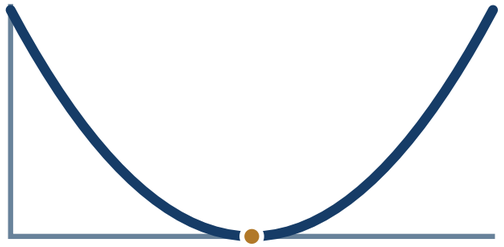
参数的个数（对数坐标，每格 ×10）



训练的原理没变：都是朝损失减小的方向调参数

变了的是规模：没有一个参数是人手设定的，也很难解释单个参数的作用

调参数需要训练信号：由谁判定输出的对错，就是它“从哪学”



朝哪边调？需要训练信号：由谁判定模型输出的对错与好坏

自监督：预测下一个词元，原文就是答案

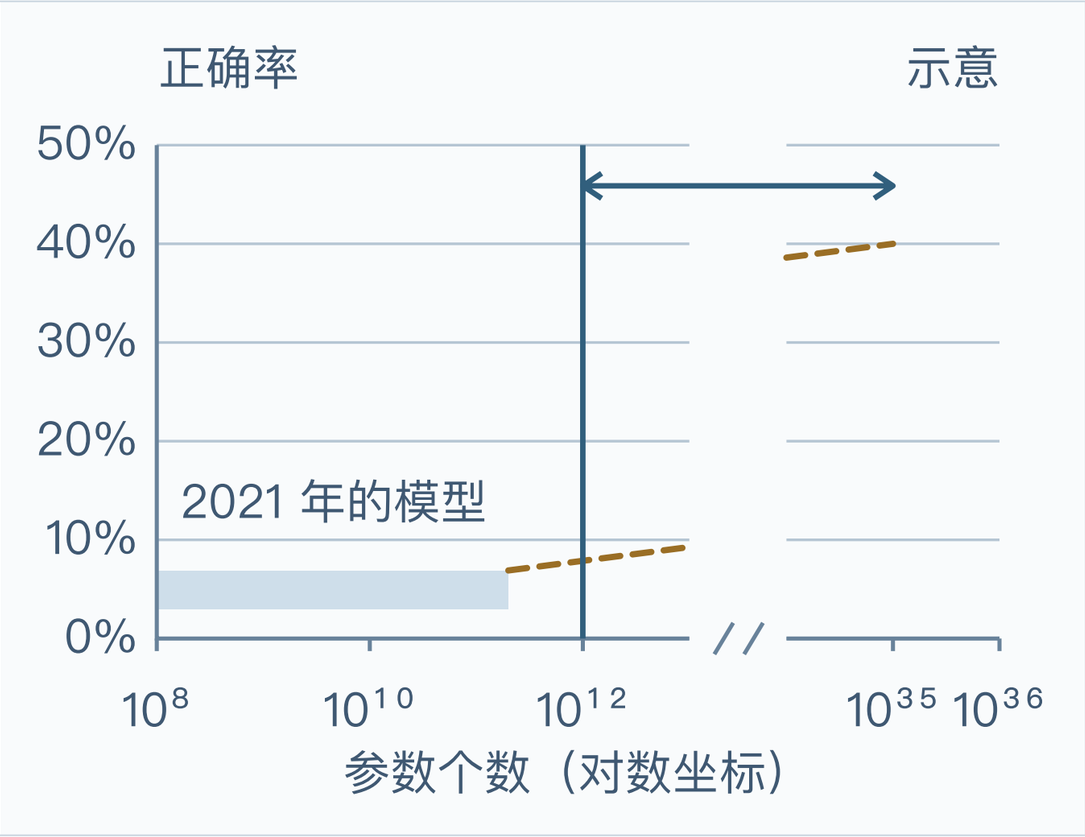
人类反馈：人指出哪个回答更好，或按步骤评分

强化学习：自己做题，由证明检查器或环境判定对错

它是长出来的，不是写出来的：它的行为来自训练得到的参数，不是人写的规则。

它从哪学 = 训练信号从哪来

2021 年那条外推线后来怎样了：没有人等到 10^{35} 个参数，变的不只是参数个数



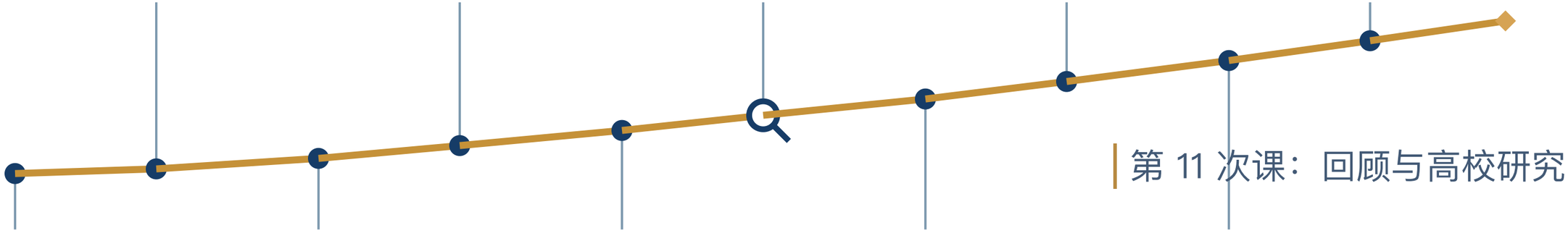
> 2021 年的模型：1 亿到 1750 亿个参数，正确率 3.0% 到 6.9%
>
> 2021 年的外推：按当时“参数越多、正确率越高”的趋势，正确率到 40% 约需 10^{35} 个参数

2026 年，一个公开了参数个数的大模型：约 10^{12} 个，离 10^{35} 还差 23 个数量级

而 2025 年，AI 已经到了 IMO 金牌线：它没有沿着这条线走；变的不只是参数个数，还有训练方法和作答方式

> **外推一条趋势线，等于假设其他条件不变**

十讲的地图：沿着“从哪学”（训练信号的来源）一站一站走



1 一年长大了多少
｜评测与度量
我们在这儿

2 机器怎么“学”
｜从规则到监督学习：人写的规则、人标的样本

3 猜下一个词
｜自监督预训练：人写下的文字

4 人来教
｜微调与人类反馈：人的示范和打分

5 自己练
｜强化学习：能自动验证的答案

6 打开它的脑袋
｜可解释性：它想的和它说的

7 看懂、画出、造世界
｜多模态与生成模型：图文配对、视频的下一帧

8 给它一双手
｜智能体：工具的反馈、记忆、真实世界

9 一群 AI 做科学
｜多智能体与形式化验证：实验、证明检查器、别的 AI

10 尺子与你
｜评测与对齐：人定的指标

第 11 次课：回顾与高校研究

每一种训练信号的来源，都带来一类典型的错误：它从哪学，就怎么错



1 一年长大了多少 ｜评测与度量	2 机器怎么“学” ｜从规则到监督学习	3 猜下一个词 ｜自监督预训练	4 人来教 ｜微调与人类反馈	5 自己练 ｜强化学习	6 打开它的脑袋 ｜可解释性	7 看懂、画出、造世界 ｜多模态与生成模型	8 给它一双手 ｜智能体	9 一群 AI 做科学 ｜多智能体与形式化验证	10 尺子与你 ｜评测与对齐

2 换个地方就不灵（分布偏移）	3 猜得像，就会编（幻觉）	4 学会讨好人（谄媚）
5 像证明的，不一定是证明（看似正确的错误证明）	6 写出来的理由，不一定是它真用的（推理不忠实）	7 画得像，不等于懂物理（物理不一致）
8 为了让测试全过，它改过测试文件（奖励投机）	9 宣称的新发现，要机器逐行查过才算（需要形式化验证）	10 尺子写错，它就绕着尺子长（古德哈特定律）

它从哪学，就怎么错

三条线索贯穿十讲：训练信号从哪来，怎么验证它对，人的角色在哪



1 一年长大了多少 ｜评测与度量	2 机器怎么“学” ｜从规则到监督学习	3 猜下一个词 ｜自监督预训练	4 人来教 ｜微调与人类反馈	5 自己练 ｜强化学习	6 打开它的脑袋 ｜可解释性	7 看懂、画出、造世界 ｜多模态与生成模型	8 给它一双手 ｜智能体	9 一群 AI 做科学 ｜多智能体与形式化验证	10 尺子与你 ｜评测与对齐

它从哪学（训练信号的来源）

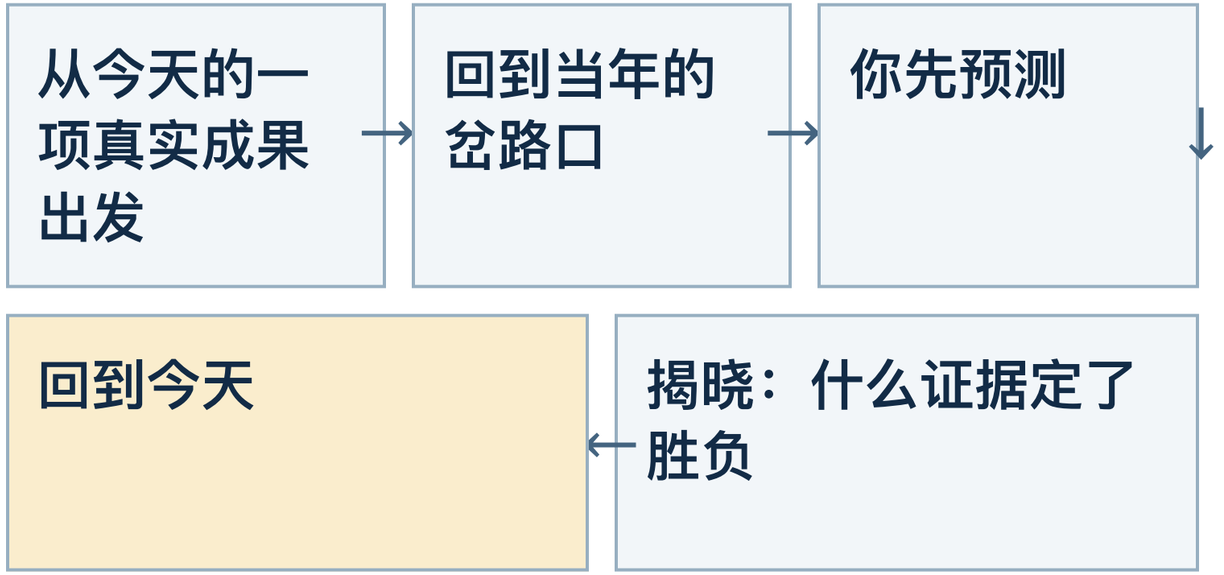
像不等于对：怎么知道它对？（验证与评测）

今天：一个评测成绩，四个条件

人站在哪？（人的角色）

今天：预测的、做形式化的、评分的、定规范的，都是人

每一讲同一个走法：从今天的一项真实成果出发，回到当年的岔路口，你先预测



- 它真正的本事
- 它在哪会错
- 还没解决的题
- 我们怎么用
- 课后试一步

以前一周备一节课，现在一晚试一个想法：生成变便宜了，验证没有

以前：备一节课 5 到 7 天，逐页手工制作

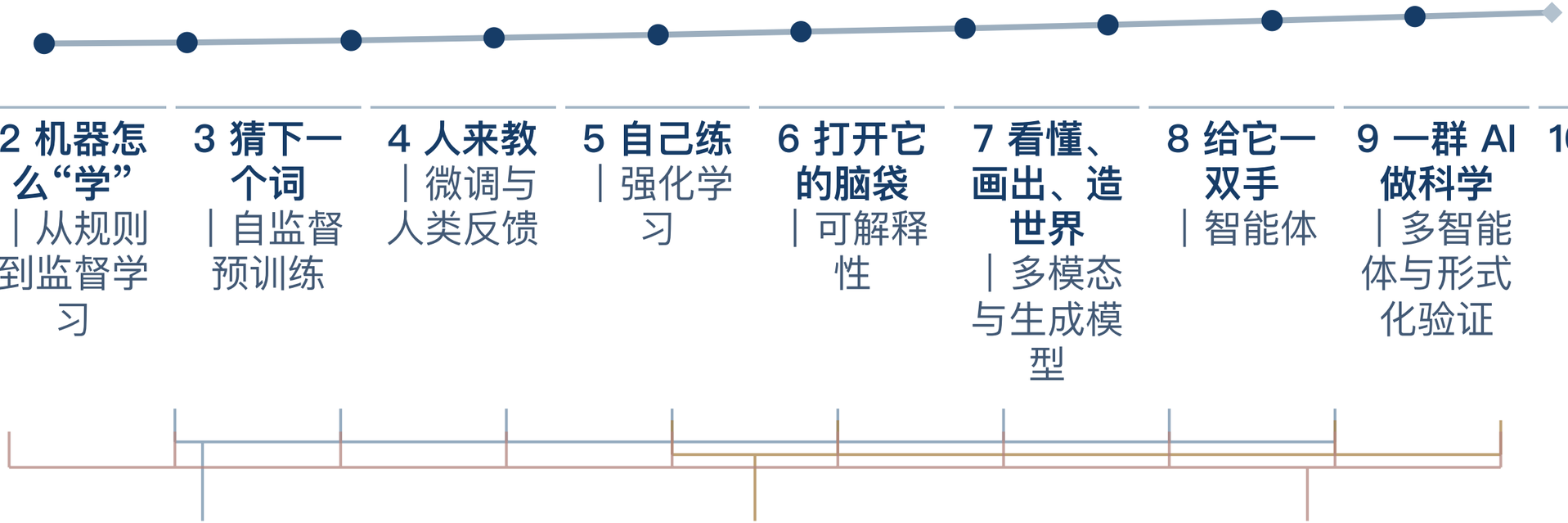


现在：每晚交给 AI 试一个新想法，一周试 7 个



这一讲：老师定方向，几个 AI 分工完成，老师最后审核

三个问题留给后面：每个问题由哪几讲回答



它从哪学？（训练信号的来源）→ 第 2–9 讲

怎么知道它对？（验证与评测）→ 第 5、6、9、10 讲

人站在哪？（人的角色）→ 每一讲，第 10 讲汇总

课后试一步：自己出一道题，独立问 8 次，估计它的单次成功率



课后试一步（不用交）：

① 选一道你确实会做的题，改掉其中一个常见条件

② 同一道题，开 8 个新对话，各问一次（8 次独立尝试）

③ 记录：8 次里对了几次？错的几次，是否错在同一步？

> 对了 m 次：它在这道题上的单次成功率 p 约为 m/8。算一算：8 次取最优、8 次全部成功的概率各是多少？

下一道题，由你来出。

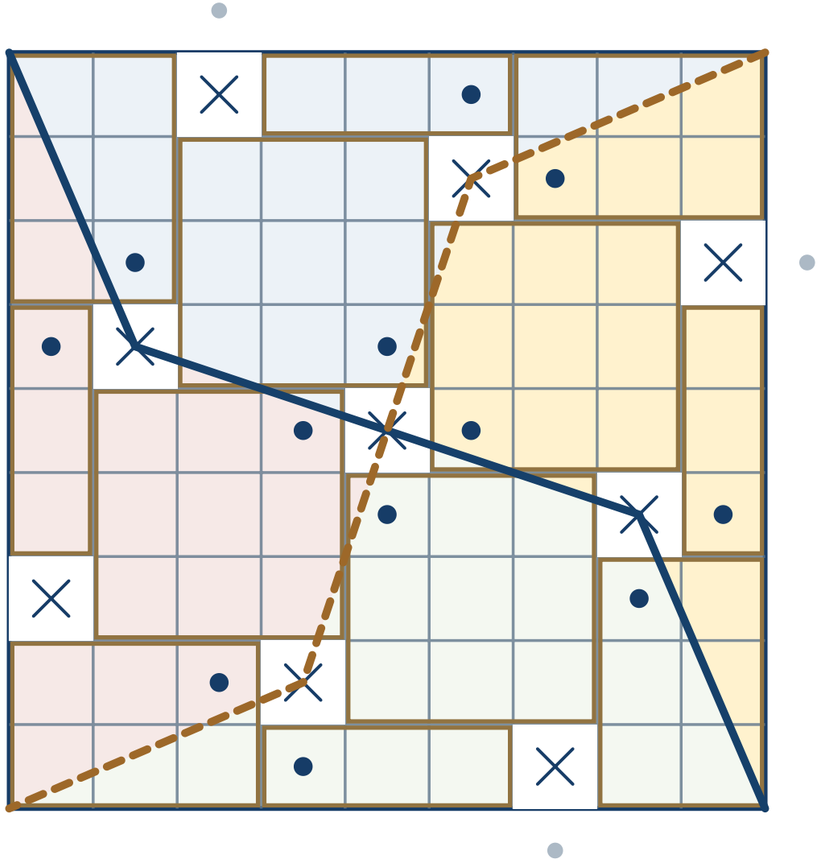
下一讲：人写不出“猫长什么样”的规则，机器怎么学会认猫?



第 2 讲：机器怎么“学”

人写不出“猫长什么样”的规则，机器怎么学会认猫?

附录：引理“砖数 ⩾ N＋a＋b−3”的证明提纲



取一个最长上升子列（a 个空格）、一个最长下降子列（b 个空格），各连成折线，接到棋盘的两个对角

棋盘被分成上、右、下、左四个区域

给每个空格做标记：它在哪个区域，就在朝那一侧相邻的格子里做一个标记

只在一个子列上的空格：两侧的两个区域各做一个标记

两个子列共用的空格：上下左右各做一个标记

共 N ＋ a ＋ b ＋ 1 个标记。这张图：9 ＋ 3 ＋ 3 ＋ 1 ＝ 16 个

可以证明：同一块砖里最多一个标记

最多 4 个标记落在棋盘外（这张图正好 4 个）

所以：砖数 ⩾ (N ＋ a ＋ b ＋ 1) − 4 ＝ N ＋ a ＋ b − 3。
这张图：棋盘内 12 个标记，12 块砖里各一个

两个子列没有公共空格时要另外多数一块砖，结论相同；完整的论证见 Evan Chen 的 IMO 2025 解答笔记